

Capítulo 3

Estática

3.1. Concepto de tensión: vector tensión

Consideremos un sólido en equilibrio en su configuración actual. Si se divide en dos partes cortándolo mediante una superficie cualquiera, cada una de las dos partes considerada como sólido libre debe estar en equilibrio. Para ello es necesario que existan unas **fuerzas internas** actuando sobre la superficie del corte. Estas fuerzas de superficie equivalen a la actuación sobre cada punto de la superficie de un **vector tensión** que se introduce de forma axiomática mediante el *Principio de tensión de Euler–Cauchy*. Para ello se define en el entorno de un punto $\mathbf{x}$ una sucesión de entornos de superficie decreciente $\{A_n\}$. La resultante de las fuerzas sobre cada recinto es $\mathbf{F}_n$ y el momento resultante respecto a $\mathbf{x}$ es $\mathbf{M}_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{F}_n}{A_n} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \quad (3.1a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{M}_n}{A_n} = \mathbf{0}, \quad (3.1b)$$

donde $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ es el vector tensión, que depende del vector normal $\mathbf{x}$ a la superficie de corte en el punto $\mathbf{x}$. Por tanto $\mathbf{t}$ únicamente depende de este vector, y es el mismo para todas las superficies de corte cuyo plano tangente en $\mathbf{x}$ es $\mathbf{n}$. Si se relaja la hipótesis (3.1b) se desarrolla la *teoría polar* que se emplea en los problemas de electromagnetismo.

Por otra parte, del principio de acción y reacción se deduce que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t).$$

3.2. Fórmula de Cauchy: tensor de tensiones de Cauchy

Consideremos el equilibrio de un tetraedro elemental en el entorno de un punto situado en $\mathbf{x}$ con tres caras perpendiculares a los ejes coordenados y

una cara inclinada definida por su normal $\mathbf{n}$. La ecuación de equilibrio de

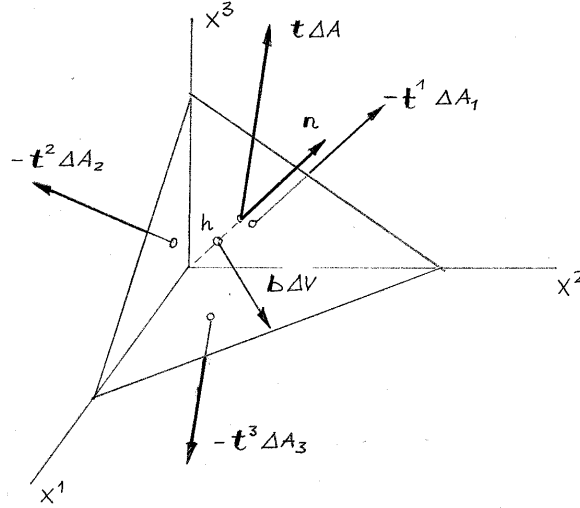


Figura 3.1: Fuerzas sobre un tetraedro elemental

fuerzas será

$$\mathbf{t} \Delta A - \mathbf{t}^1 \Delta A_1 - \mathbf{t}^2 \Delta A_2 - \mathbf{t}^3 \Delta A_3 + \mathbf{b} \Delta V = \mathbf{0}.$$

El último término se puede escribir en función de la altura del tetraedro $\Delta V = 1/3 h \Delta A$, es de un orden de magnitud superior al resto y tiende a 0 en el límite. Por lo tanto cuando $h \rightarrow 0$

$$\mathbf{t} \Delta A = \mathbf{t}^1 \Delta A_1 + \mathbf{t}^2 \Delta A_2 + \mathbf{t}^3 \Delta A_3. \quad (3.2)$$

La relación entre las áreas de las caras del tetraedro se obtiene aplicando el teorema del gradiente al tetraedro elemental, con una función constante $\phi = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \phi dV = \int_{\partial V} \phi \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= \mathbf{n} \Delta A - \mathbf{i}_1 \Delta A_1 - \mathbf{i}_2 \Delta A_2 - \mathbf{i}_3 \Delta A_3, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= n_1 \Delta A \\ \Delta A_2 &= n_2 \Delta A \\ \Delta A_3 &= n_3 \Delta A. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.2) y simplificando dA resulta

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{t}^1 n_1 + \mathbf{t}^2 n_2 + \mathbf{t}^3 n_3 = [\mathbf{t}^1 \ \mathbf{t}^2 \ \mathbf{t}^3] \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}. \quad (3.3)$$

Se puede observar que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ es un tensor definido en la configuración actual. Las columnas del tensor son los vectores tensión que actúan sobre las caras positivas de un elemento diferencial de volumen orientado según los ejes coordenados. $\boldsymbol{\sigma}$ es el denominado **tensor de tensiones de Cauchy**.

3.3. Ecuaciones de equilibrio

Las demostraciones contenidas en esta sección se basan en la referencia [3] en el caso estático; se elimina pues la variable t .

3.3.1. Equilibrio en el contorno

Si ∂V es la expresión que denota el contorno del sólido, y $\bar{\mathbf{t}}$ es la fuerza de superficie que actúa en cada punto del contorno del sólido, entonces a partir del **principio de acción y reacción**, y de la fórmula de Cauchy (3.3) se cumple

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{en } \partial V, \quad (3.4)$$

expresión en la que $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal al contorno, y $\boldsymbol{\sigma}$ se evalúa en los puntos del contorno. En componentes

$$\bar{t}^a = \sigma^{ab} n_b \quad \text{en } \partial V.$$

3.3.2. Equilibrio interno

El **principio de conservación del momento lineal** (1.2), junto con el resultado anterior, permite deducir las ecuaciones de equilibrio interno. Introduciendo la ecuación de equilibrio en el contorno en la ecuación de conservación del momento lineal en el caso estático ($\mathbf{v} = 0$) se obtiene

$$\mathbf{0} = \int_V \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \bar{\mathbf{t}} dA = \int_V \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA$$

Trabajando en componentes y aplicando el teorema de la divergencia se cumple

$$0 = \int_V b^a dV + \int_{\partial V} \sigma^{ab} n_b dA = \int_V b^a dV + \int_V \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial x^b} dV$$

para un volumen arbitrario, por tanto

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial x^b} + b^a = 0 \quad \text{o bien} \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } V.$$

3.3.3. Simetría del tensor de tensiones

A partir del **principio de conservación del momento angular** (1.3) se deduce la simetría del tensor de tensiones de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (3.5)$$

Partiendo de la ecuación (1.3) en el caso estático ($\mathbf{v} = 0$) y empleando la ecuación (3.4)

$$\mathbf{0} = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) dV + \int_{\partial V} (\mathbf{x} \times \bar{\mathbf{t}}) dA = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) dV + \int_{\partial V} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dA.$$

Trabajando en componentes, aplicando el teorema de la divergencia y haciendo uso de la ecuación de equilibrio interno se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V e^a_{mn} x^m b^n dV + \int_{\partial V} e^a_{mn} x^m \sigma^{nj} n_j dA \\ &= \int_V e^a_{mn} x^m b^n dV + \int_V e^a_{mn} \frac{\partial}{\partial x^j} (x^m \sigma^{nj}) dV \\ &= \int_V e^a_{mn} x^m \left(\frac{\partial \sigma^{nj}}{\partial x^j} + b^n \right) dV + \int_V e^a_{mn} \delta^m_j \sigma^{nj} dV \\ &= \int_V e^a_{jn} \sigma^{nj} dV, \end{aligned}$$

para un volumen arbitrario. Luego $e^a_{jn} \sigma^{nj} = 0$ en cualquier punto del sólido, y teniendo en cuenta la definición del *tensor de permutación* e^a_{jn} , se obtiene el resultado buscado (3.5).

3.4. Estado tensional en el entorno de un punto

3.4.1. Tensiones y direcciones principales

La solución del problema de valores propios

$$[\boldsymbol{\sigma} - \alpha \mathbf{I}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (3.6b)$$

proporciona las **tensiones principales**, que ordenadas de mayor a menor se denotan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (en muchos textos los subíndices son números romanos). Los vectores propios correspondientes a cada tensión principal definen las denominadas **direcciones principales de la tensión**, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$. El tensor de tensiones admite, por tanto, la siguiente expresión en el sistema de referencia cartesiano

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T \\ \mathbf{n}_2^T \\ \mathbf{n}_3^T \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Los invariantes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se denotan I_σ , II_σ , III_σ , y el polinomio característico para el cálculo de las tensiones principales es

$$-\alpha^3 + I_\sigma \alpha^2 - II_\sigma \alpha + III_\sigma = 0. \quad (3.8)$$

3.4.2. Componentes intrínsecas de la tensión

El vector tensión $\mathbf{t}$ se puede descomponer en una componente en la dirección normal y otra contenida en el plano sobre el que actúa el vector

- **Tensión normal**

$$\sigma_n = \mathbf{t}^\top \mathbf{n} = \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Para calcular las direcciones en las que se dan los valores extremos de la tensión normal (o componente normal de la tensión) buscaremos los extremos la función $\sigma_n(\mathbf{n})$ con la restricción de que el módulo de $\mathbf{n}$ sea igual a 1. Este problema se resuelve empleando un multiplicador de Lagrange α . La función objetivo es, por tanto,

$$f = \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \alpha (\mathbf{n}^\top \cdot \mathbf{n} - 1).$$

Los extremos se obtienen igualando a 0 las derivadas de f respecto a $\mathbf{n}$ y σ

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \mathbf{n} &= 2 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - 2 \alpha \mathbf{n} = 0 \\ \partial f / \partial \alpha &= \mathbf{n}^\top \cdot \mathbf{n} - 1 = 0, \end{aligned}$$

expresiones que coinciden con el planteamiento del problema de valores propios de $\boldsymbol{\sigma}$ (3.6). Por tanto, los extremos de la tensión normal se producen en las direcciones principales; la máxima tensión normal coincidirá con σ_1 y la mínima con σ_3 .

- **Tensión tangencial**

$$\tau = \sqrt{\mathbf{t}^\top \mathbf{t} - \sigma_n^2}$$

La máxima tensión tangencial es $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ y aparece sobre planos perpendiculares a las bisectrices de las direcciones principales 1 y 3, definidos por los vectores normales $\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n}_3$. La referencia [1] incluye una demostración de este resultado.

3.4.3. Tensión normal media

Se define como el promedio de las componentes normales de la tensión que aparecen en todas las direcciones posibles en el entorno de un punto, y se calcula tomando el límite del promedio de éstas sobre una esfera, cuando el radio tiende a 0.

$$\sigma_m = \frac{1}{4\pi r^2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_A \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA.$$

Se puede demostrar que

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_\sigma. \quad (3.9)$$

3.5. Tensor desviador de tensiones

El estado tensional de un punto en el interior de un fluido en reposo se denomina *hidrostático*, y se caracteriza por la igualdad de las tensiones principales y por el hecho de que cualquier dirección del espacio es principal. Por lo tanto, si la presión hidrostática es σ , en cualquier sistema de referencia el tensor se expresa así

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I}.$$

Consideremos ahora un estado tensional cualquiera. Si σ_m es la tensión normal media correspondiente a ese estado, entonces el tensor $\sigma_m \mathbf{I}$ representa la fracción *hidrostática* correspondiente a ese estado. En el capítulo siguiente se mostrará como esa fracción hidrostática es la responsable del cambio de volumen en el entorno del punto. Si restamos $\sigma_m \mathbf{I}$ del tensor de tensiones obtendremos la fracción del estado tensional que produce distorsión sin cambio de volumen. Esta parte del tensor se denomina **tensor desviador de tensiones**:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I} \quad (3.10)$$

Si se calculan los valores propios del desviador aplicando la definición anterior

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}' - \sigma' \mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{0} \\ [\boldsymbol{\sigma} - (\sigma_m + \sigma') \mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

se llega a la expresión que proporciona los valores propios del tensor de tensiones. Por tanto, los vectores propios del desviador también se orientan según las direcciones principales de la tensión, y la relación entre las tensiones principales y las **tensiones principales de desviación** es

$$\sigma_1 = \sigma_m + \sigma'_1 \quad (3.11a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_m + \sigma'_2 \quad (3.11b)$$

$$\sigma_3 = \sigma_m + \sigma'_3. \quad (3.11c)$$

Cálculo de las tensiones principales a partir del desviador

El tensor desviador proporciona un método práctico para el cálculo de las tensiones principales cuando no es posible factorizar directamente el

polinomio característico. Para ello notaremos que el primer invariante del desviador se anula siempre, por definición

$$I_{\sigma'} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}' = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - 3\sigma_m = I_{\sigma} - 3\frac{1}{3}I_{\sigma} = 0.$$

Por tanto, el polinomio característico del desviador es

$$-\sigma'^3 - II_{\sigma'} \sigma' + III_{\sigma'} = 0. \quad (3.12)$$

Haciendo el cambio de variable $\sigma' = \rho \cos \theta$ y dividiendo por ρ^3 resulta

$$\cos^3 \theta + \frac{II_{\sigma'}}{\rho^2} \cos \theta - \frac{III_{\sigma'}}{\rho^3} = 0. \quad (3.13)$$

Esta ecuación se puede comparar con la identidad trigonométrica

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0. \quad (3.14)$$

Para que la ecuación característica se cumpla es necesario que los coeficientes de ambas ecuaciones sean iguales. Entonces

$$\rho = \sqrt{-\frac{4}{3} II_{\sigma'}} \quad (3.15a)$$

$$\cos 3\theta = 4 \frac{III_{\sigma'}}{\rho^3}. \quad (3.15b)$$

Escogiendo tres soluciones de θ para la segunda ecuación y deshaciendo el cambio de variable se obtienen las tres tensiones principales de desviación. Las tensiones principales resultan finalmente de las ecuaciones (3.11).

3.6. Representaciones geométricas del vector tensión

A partir de la fórmula de Cauchy $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ escrita en ejes principales, y de la condición $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$, es posible eliminar las componentes del vector normal y obtener la siguiente relación geométrica entre las componentes del vector tensión en ejes principales

$$\frac{(t^1)^2}{\sigma_I^2} + \frac{(t^2)^2}{\sigma_{II}^2} + \frac{(t^3)^2}{\sigma_{III}^2} = 1. \quad (3.16)$$

Esta es la ecuación de un elipsoide, que se denomina **elipsoide de tensiones de Lamé** cuyos ejes coinciden con los ejes principales. La longitud de cada

semieje es igual al valor absoluto de cada tensión principal. El elipsoide es el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión en el punto que se estudia, sin embargo no ofrece ninguna relación con las componentes del vector normal al que se corresponde cada vector unitario. Para obtener este tipo de relación es necesario recurrir a otra construcción ideada por Cauchy: la denominada **cuádriga de tensiones de Cauchy**. La deducción de sus ecuaciones se puede consultar en la referencia [2, sección 3.9].

Bibliografía

- [1] J. Casanova, *Fundamentos de Elasticidad Teórica*, Editorial UPV, 1993, núm. 231.
- [2] Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [3] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Engineering of the Physical Sciences, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.