

Capítulo 4

Ecuaciones constitutivas

4.1. Introducción: comportamiento uniaxial de materiales elásticos, plásticos y viscosos

Hasta este punto hemos analizado la descripción matemática del cambio de forma o deformación y de las fuerzas internas o tensiones que se desarrollan en un sólido deformable como consecuencia de las acciones exteriores. Este capítulo trata de las ecuaciones que caracterizan la respuesta de un determinado material frente a las cargas exteriores, es decir, de la relación entre tensiones y deformaciones. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones constitutivas** pues describen el comportamiento macroscópico resultante de la constitución interna de un material. La respuesta real de fluidos y sólidos es extremadamente compleja y variada. No sólo se ve influida por acciones puramente mecánicas, sino también por cambios de temperatura o humedad, e incluso por la *historia* del material, es decir por situaciones en las que se ha encontrado con anterioridad. No resulta posible escribir un conjunto de ecuaciones que describan el comportamiento de un material frente a todas las acciones posibles en cualquier situación, por ello es preferible analizar lo que denominamos **modelos ideales de comportamiento**, asociados a comportamientos simplificados que reproducirán con suficiente precisión la respuesta de algunas sustancias frente a determinadas acciones con valores comprendidos en un cierto intervalo. En principio consideraremos tres tipos de comportamiento ideal: el modelo **elástico**, el modelo **plástico** y el modelo **viscoso**. Para ilustrarlos es conveniente recurrir, en primer lugar, al análisis del comportamiento uniaxial instantáneo del acero estructural en tracción, que se observa en la figura y se puede obtener mediante un ensayo normalizado en el laboratorio. En el diagrama se representa en ordenadas la tensión nominal σ (fuerza de tracción dividida por el área inicial de la probeta) frente al alargamiento unitario nominal ϵ (deformación lineal de la muestra medida como la relación entre el incremento de longitud entre dos marcas y la distancia inicial entre ellas).

En el primer tramo OA del diagrama la respuesta es sensiblemente lineal y proporcional, de forma que $\sigma = E\epsilon$. La constante de proporcionalidad es el conocido *módulo de elasticidad* o módulo de Young. El tramo AB es corto y se caracteriza por la pérdida de proporcionalidad. La totalidad del recorrido OB se caracteriza por el hecho de que toda la deformación es recuperable: si reducimos el nivel de tensión la deformación se reduce y el punto (ϵ, σ) recorre la gráfica en sentido inverso por el mismo camino inicial. A se denomina *límite de proporcionalidad*. Estos dos tramos iniciales definen lo que entendemos por **respuesta elástica ideal**: la deformación se recupera completamente una vez cesa la fuerza que la produce.

Una vez sobrepasado el punto B (*límite elástico*) se produce un aumento no controlado de la deformación sin aumento apreciable de la fuerza (fluencia). Las deformaciones alcanzadas en este tramo ya no se pueden recuperar totalmente. Si se lleva a cabo la descarga de la probeta se retrocede por una curva que tiene una forma similar al tramo OB, de forma que al alcanzar el origen de tensiones queda una deformación remanente o plástica, que ya no es recuperable. Al cargar de nuevo se regresa hasta el punto donde se había iniciado la descarga. Esta zona es característica de la **respuesta plástica**.

Alcanzado un determinado punto C se produce un cierto endurecimiento de la muestra, y finalmente la fractura de la misma.

Para explicar el modelo de comportamiento viscoso podemos recurrir a un ensayo de compresión sobre una probeta de hormigón llevado a cabo ahora con cargas de larga duración. En el primer tramo del ensayo la tensión aumenta hasta un cierto valor σ_0 que produce una deformación ϵ_0 . Si se mantiene el valor de la tensión y se procede a medir la evolución de la deformación en el tiempo se observa que sigue aumentando progresivamente hasta un cierto valor al que tiende asintóticamente. El comportamiento en descarga es análogo y la recuperación de parte de la deformación se produce lentamente. Este comportamiento es característico de los materiales viscosos.

Los modelos ideales considerados son los siguientes:

- **Modelo elástico.** Estudia la respuesta instantánea del material. Se caracteriza por que la deformación producida por una fuerza se recupera totalmente cuando ésta cesa.
- **Modelo plástico.** Estudia la respuesta instantánea del material. Se caracteriza por que la deformación no se recupera cuando cesa la fuerza que la produjo.
- **Modelo viscoso.** Estudia la respuesta diferida del material. Se caracteriza por que la deformación sigue aumentando a lo largo del tiempo para un nivel constante de tensión.

4.2. Modelos elásticos: clasificación

Dentro de los modelos elásticos, a su vez, es posible establecer una clasificación

- **Modelo hiperelástico** Un material se denomina hiperelástico cuando existe una cierta función $\mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon})$ de las componentes del tensor de deformaciones para la que se cumple

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (4.1)$$

La función \mathcal{W} actúa como potencial de las tensiones.

- **Modelo elástico** Se dice que un material es elástico si existe un *estado natural* en el que se encuentra libre de tensiones, y alrededor de ese estado es posible definir una función uno a uno entre las componentes del tensor de tensiones y las del tensor de deformaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (4.2)$$

- **Modelo hipoelástico** El modelo hipoelástico es un modelo que relaciona tensiones y deformaciones a nivel incremental

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(d\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (4.3)$$

4.3. Energía de deformación y energía complementaria

Consideremos un sólido libre de fuerzas en la configuración de referencia. Supongamos que sobre él actúa un sistema de fuerzas de volumen \mathbf{b} y de superficie $\bar{\mathbf{t}}$ que se aplica gradualmente hasta alcanzar su valor final. Tras la aplicación de las cargas el sólido se deforma hasta su configuración actual definida por el campo de desplazamientos \mathbf{d} . El trabajo realizado por las fuerzas exteriores es

$$T = \int_V \int_0^{\mathbf{d}} \mathbf{b} \, d\mathbf{d} \, dV + \int_{\partial V} \int_0^{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{t}} \, d\mathbf{d} \, dA. \quad (4.4)$$

Por el principio de conservación de la energía, el trabajo de las fuerzas exteriores T debe transformarse en energía durante el proceso de cambio de forma. Si bien parte de esta energía puede perderse, por ejemplo, en la formación de fisuras o en forma de calor, otra parte de ella queda acumulada en el material como una forma de energía potencial. La parte que se acumula en el material se denomina **energía de deformación** y se denota mediante la letra U .

Cuando la totalidad del trabajo de las fuerzas exteriores se transforma en energía de deformación a lo largo del proceso de cambio de forma, el material se puede calificar de *conservativo* y se cumple

$$T = U.$$

El material hiperelástico ideal reúne esta propiedad, y es, por tanto, capaz de devolver íntegramente la energía que ha almacenado.

Mediante un símil sencillo podemos describir la energía de deformación como el área encerrada bajo la curva que describe el proceso carga – desplazamiento. A partir de esta descripción de la energía es posible introducir una magnitud con un sentido físico más difícil de interpretar. Se trata de la **energía complementaria**, definida como el área que queda *sobre* la curva carga – desplazamiento, hasta el nivel de carga alcanzado.

4.4. El modelo hiperelástico

Ya hemos introducido el material hiperelástico como el material elástico conservativo, capaz de devolver la energía acumulada. Introduciremos a continuación el concepto de densidad de energía de deformación.

4.4.1. Densidad de energía de deformación

Por analogía con la definición de un campo de fuerzas conservativo –en el que la fuerza ejercida sobre la partícula se obtiene como el gradiente de una función potencial escalar– en el material hiperelástico es posible definir una función potencial de las variables cinemáticas (deformaciones), cuya derivada respecto de éstas proporcione las variables estáticas (tensiones). Esta función se denomina **densidad de energía de deformación** y se denota $\mathcal{W}(\epsilon)$. Su integral en el volumen del sólido es la energía de deformación, y sus derivadas respecto de las componentes de la deformación proporcionan las componentes de la tensión:

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \epsilon} \quad (4.5)$$

$$U = \int_V \mathcal{W}(\epsilon) dV. \quad (4.6)$$

Por otro lado, la densidad de energía de deformación se puede interpretar como la suma de las áreas bajo cada una de las curvas de las componentes de la tensión respecto de las de la deformación

$$\mathcal{W}(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\mathcal{W} = \int_0^\epsilon \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \epsilon} : d\epsilon = \int_0^\epsilon \sigma : d\epsilon.$$

En notación clásica,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = & \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x + \int_0^{\epsilon_y} \sigma_y d\epsilon_y + \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\epsilon_z \\ & + 2 \int_0^{\epsilon_{xy}} \tau_{xy} d\epsilon_{xy} + 2 \int_0^{\epsilon_{xz}} \tau_{xz} d\epsilon_{xz} + 2 \int_0^{\epsilon_{yz}} \tau_{yz} d\epsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Haciendo el cambio de variable $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ se obtiene la expresión de la densidad en función de las distorsiones angulares

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = & \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x + \int_0^{\epsilon_y} \sigma_y d\epsilon_y + \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\epsilon_z \\ & + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.4.2. Densidad de energía complementaria

4.5. El modelo elástico lineal

4.5.1. Material anisótropo

La relación lineal entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se expresa así

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (4.9)$$

En componentes

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.10)$$

En esta ecuación, \mathbf{C} es un tensor de cuarto orden denominado **tensor de elasticidades**. Tiene por tanto $3^4 = 81$ componentes. No es difícil demostrar que la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ implica las siguientes simetrías de \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &= C^{jikl} \\ C^{ijkl} &= C^{ijlk} \\ C^{ijkl} &= C^{klij}. \end{aligned}$$

Estas simetrías reducen de 81 a 21 las componentes distintas del tensor. También se puede obtener este mismo resultado expresando en forma vectorial la ecuación (4.9):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (4.11)$$

En esta nueva ecuación, $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector que contiene las seis componentes independientes del tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\}, \quad (4.12)$$

ϵ es el vector que contiene los alargamientos unitarios en las direcciones coordenadas y las distorsiones angulares entre ellas

$$\epsilon = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}, \quad (4.13)$$

y \mathbf{C} es la denominada **matriz constitutiva**, que es una matriz cuadrada *simétrica* de 6×6 elementos, de los cuales, por tanto, sólo 21 son independientes.

4.5.2. Material isótropo: ecuaciones de Lamé, ley de Hooke generalizada

El tensor \mathbf{C} debe ser un tensor isótropo de cuarto orden. A partir de esta condición y utilizando sus condiciones de simetría, es posible demostrar que el número de parámetros independientes en \mathbf{C} se reduce a 2, que denominaremos λ y μ , y que la ecuación (4.9) se transforma en

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{e} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4.14)$$

expresión que constituye las denominadas **ecuaciones de Lamé** en la que interviene la deformación volumétrica introducida en el capítulo de cinemática. La forma clásica de las ecuaciones de Lamé es

$$\sigma_x = \lambda \mathbf{e} + 2\mu \epsilon_x \qquad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \quad (4.15a)$$

$$\sigma_y = \lambda \mathbf{e} + 2\mu \epsilon_y \qquad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz} \quad (4.15b)$$

$$\sigma_z = \lambda \mathbf{e} + 2\mu \epsilon_z \qquad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad (4.15c)$$

y su expresión en la forma $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}$ resulta

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Las constantes λ y μ son los denominados **parámetros de Lamé**. Es usual emplear la notación alternativa G para el parámetro μ .

Por otra parte, sumando las tres ecuaciones de Lamé que proporcionan las tensiones normales se obtiene el siguiente resultado

$$I_\sigma = (3\lambda + 2\mu) \mathbf{e}. \quad (4.17)$$

Sustituyendo en la expresión (4.14) se puede despejar la relación inversa, que resulta

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} I_\sigma \mathbf{I} \right].$$

Si introducimos dos nuevos parámetros, E y ν , definidos como

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (4.18)$$

con las expresiones inversas

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (4.19)$$

es sencillo demostrar que la expresión anterior se transforma en

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} I_{\sigma} \mathbf{I}. \quad (4.20)$$

Esta es la expresión compacta de la **Ley de Hooke generalizada**; en notación clásica

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (4.21a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (4.21b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz}. \quad (4.21c)$$

Las constantes E y ν se denominan **módulo de elasticidad** y **coeficiente de Poisson** respectivamente. La expresión de la ley de Hooke generalizada en la forma $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

4.5.3. Interpretación física de las constantes elásticas del material de Hooke

■ Módulo de elasticidad

Si consideramos de nuevo el ensayo de tracción uniaxial, es fácil notar que en este ensayo $\sigma_y = \sigma_z = 0$, y además $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Sustituyendo estos valores en la primera ecuación de la Ley de Hooke resulta

$$\sigma_x = E \epsilon_x,$$

relación que permite una interpretación sencilla del módulo de elasticidad.

- **Módulo de Poisson**

Con las condiciones anteriores es posible calcular las deformaciones ϵ_y y ϵ_z en el ensayo de tracción uniaxial. El resultado es

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \qquad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x.$$

Estas expresiones indican que en el ensayo uniaxial de tracción, las dimensiones de la sección transversal se reducen proporcionalmente al valor del coeficiente de Poisson.

- **Módulo de elasticidad transversal**

A partir del ensayo de corte directo en la dirección X sobre caras $Z = const.$, en el que la única componente no nula de la tensión es τ_{xz} se deduce a partir de la ley de Hooke

$$\tau_{xz} = \mu \gamma_{xz},$$

que muestra cómo $\mu = G$ está relacionado con la rigidez frente a la distorsión del material.

- **Módulo de deformación volumétrica**

La ecuación (4.17) establece una relación entre el primer invariante de la tensión y la deformación volumétrica. Teniendo en cuenta que la tensión normal media es un tercio del primer invariante se cumple

$$\sigma_m = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \mathbf{e}.$$

al factor de la deformación volumétrica lo denominamos K , módulo de deformación volumétrica, por tanto

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (4.23)$$

4.5.4. Energía de deformación en el material lineal. Fórmula de Clapeyron

Volviendo al material elástico lineal en su caso más general, si la relación entre las componentes de la tensión y de la deformación es lineal, entonces es posible simplificar la expresión clásica de la densidad de energía de deformación

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (4.24)$$

Esta expresión se denomina **fórmula de Clapeyron**. Si empleamos la notación vectorial introducida antes podemos calcular la densidad de energía de deformación como forma cuadrática de las componentes de la deformación

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (4.25)$$

Finalmente, la energía de deformación se obtiene integrando la densidad de energía en el volumen del sólido

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV. \quad (4.26)$$

4.6. Límite del modelo elástico: criterios de plastificación

En esta sección se ha seguido la referencia [1].

4.6.1. Criterios para materiales metálicos

Criterio de *Tresca*

Se basa en limitar el diámetro de la mayor circunferencia de Mohr al valor σ_{e0}

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_{e0}^2][(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_{e0}^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_{e0}^2] \leq 0. \quad (4.27)$$

Los estados tensionales posibles expresados como puntos $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se encuentran comprendidos en el interior de un prisma hexagonal cuyo eje viene definido por la dirección $\{1\ 1\ 1\}$ y cuyo lado es $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{e0}$. La plastificación se produce cuando se alcanza la superficie del prisma.

Criterio de *von Mises*

En este caso los estados posibles se encuentran en el interior de un cilindro con la misma orientación y el mismo radio que el prisma de Tresca. Su expresión es

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2 \sigma_{e0}^2 = 0. \quad (4.28)$$

4.6.2. Criterios para materiales geológicos

Criterio de *Mohr-Coulomb*

La plastificación se alcanza cuando la mayor circunferencia de Mohr es tangente a la recta

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi, \quad (4.29)$$

donde c es la cohesión y φ el ángulo de rozamiento interno. Esta condición se puede expresar de la forma

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = [(\sigma_1 - K \sigma_2 - C)(\sigma_2 - K \sigma_1 - C)][(\sigma_1 - K \sigma_3 - C)(\sigma_3 - K \sigma_1 - C)] \\ [(\sigma_2 - K \sigma_3 - C)(\sigma_3 - K \sigma_2 - C)] \leq 0, \quad (4.30)$$

con

$$K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4.31)$$

y

$$C = c \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (4.32)$$

La superficie de plastificación es, en este caso, un cono de base hexagonal.

Criterio de *Drucker–Prager*

Corresponde a una superficie cónica de ecuación

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - A^2 (I_\sigma + B)^2 = 0. \quad (4.33)$$

Bibliografía

- [1] R. Irlés Mas, *Mecánica de Medios Continuos Para Ingenieros Geólogos*, Publicaciones de la Universidad de Alicante, 2004.